15/05/19

Γραμμική Άλγεβρα

Προσαρτημένοι Ενδομορφισμοί - Συζυγείς Πίνακες

Γραμμικά Θεωρήματα

Θεώρημα: Έστω $(E, \langle , \rangle)$ Ε.Χ. $\dim E = n < \infty$, και $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E. Τότε $\exists!$ ενδομορφισμός $f^*: E \to E$: $\boxed{\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E}$

Λήμμα: Έστω $\varphi: E \to \mathbb{R}$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε $\exists! \vec{v} \in E$: $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle$, $\forall \vec{x} \in E$.

Απόδειξη: Έστω $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ ΟΚΒ του E. Τότε $\forall \vec{x} \in E$: $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$. Τότε
$\varphi(\vec{x}) = x_1\varphi(\vec{e_1}) + x_2\varphi(\vec{e_2}) + \dots + x_n\varphi(\vec{e_n})$. Ορίζουμε $\vec{v} = \varphi(\vec{e_1})\vec{e_1} + \varphi(\vec{e_2})\vec{e_2} + \dots + \varphi(\vec{e_n})\vec{e_n} \in E$ και τότε:

$$\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}, \varphi(\vec{e_1})\vec{e_1} + \dots + \varphi(\vec{e_n})\vec{e_n} \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \varphi(\vec{e_j}) \overbrace{\langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle}^{\delta_{ij}} = x_1\varphi(\vec{e_1}) + \dots + x_n\varphi(\vec{e_n}) =$$

$= \varphi(\vec{x})$. Άρα $\forall \vec{x} \in E$ $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle$.

Έστω $\vec{w} \in E$ επίσης: $\forall \vec{x} \in E$: $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle$. Τότε $\forall \vec{x} \in E$ $\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{w} - \vec{v} \rangle = 0$, και τότε για $\vec{x} = \vec{v} - \vec{w}$ θα έχουμε $\langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{v} - \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$.

Έστω $\vec{y} \in E$. Θα ορίσουμε ένα νέο διάνυσμα $f^*(\vec{y})$, ως εξής: Θεωρούμε απεικόνιση $\varphi_{\vec{y}}: E \to \mathbb{R}$, $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle$.
Η απεικόνιση που ορίσαμε $\varphi_{\vec{y}}$ είναι γραμμική, διότι: $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \langle f(\vec{x_1} + \vec{x_2}), \vec{y} \rangle = \langle f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2}), \vec{y} \rangle =$
$= \langle f(\vec{x_1}), \vec{y} \rangle + \langle f(\vec{x_2}), \vec{y} \rangle = \varphi_{\vec{y}}(\vec{x_1}) + \varphi_{\vec{y}}(\vec{x_2})$ [Γραμμικότητα I]
$\varphi_{\vec{y}}(\kappa\vec{x}) = \langle f(\kappa\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \kappa f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \kappa \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \kappa\varphi_{\vec{y}}$ [Γραμμικότητα II]

Τότε από το λήμμα, $\exists! \vec{v_y} \in E$: $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{v_y} \rangle \Rightarrow \exists! \vec{v_y} \in E$: $\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{v_y} \rangle$.
Ορίζουμε $f^*(\vec{y})$ = το μοναδικό διάνυσμα $\vec{v_y}$ του E, για το οποίο ισχύει ότι $\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{v_y} \rangle$, $\forall \vec{x} \in E$ (*)
Έτσι έχουμε μια απεικόνιση $f^*: E \to E$, $\vec{y} \mapsto f^*(\vec{y})$ για την οποία ισχύει ότι: $\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \ \ \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle}$

Ισχυρισμός: Η απεικόνιση f^* είναι γραμμική.
Έστω $\vec{y_1}, \vec{y_2} \in E$. Θδο $f^*(\vec{y_1} + \vec{y_2}) = f^*(\vec{y_1}) + f^*(\vec{y_2})$

$\boxed{\text{Υπενθύμιση: } \vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E \ \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle}$

$\langle \vec{x}, f^*(\vec{y}_1+\vec{y}_2)\rangle \overset{(*)}{=\!=\!=} \langle f(\vec{x}), \vec{y}_1+\vec{y}_2\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{y}_1\rangle + \langle f(\vec{x}), \vec{y}_2\rangle \overset{(*)}{=\!=\!=} \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}_1)\rangle + \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}_2)\rangle$
$= \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}_1) + f^*(\vec{y}_2)\rangle, \ \forall \vec{x} \in E \Rightarrow f^*(\vec{y}_1+\vec{y}_2) = f^*(\vec{y}_1) + f^*(\vec{y}_2)$ (α)

Θδο: $f^*(\kappa\vec{y}) = \kappa f^*(\vec{y}), \ \forall \vec{y} \in E$
$\langle \vec{x}, f^*(\kappa\vec{y})\rangle \overset{(*)}{=\!=} \langle f(\vec{x}), \kappa\vec{y}\rangle = \kappa\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle \overset{(*)}{=\!=\!=} \kappa\langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \kappa f^*(\vec{y})\rangle, \ \forall \vec{x} \in E \Rightarrow$
$f^*(\kappa\vec{y}) = \kappa f^*(\vec{y})$ (β)

(α), (β) $\Longrightarrow$ η f^* είναι γραμμική $\Longrightarrow$ f^* ενδομορφισμός του E.

Έστω ότι $g: E \to E$ ένας άλλος ενδομορφισμός του E έτσι ώστε: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \ \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, g(\vec{y})\rangle$ Θδο: $f^* = g$.

Από την τελευταία σχέση και την (*), έπεται ότι: $\langle \vec{x}, g(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\rangle, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$. Τότε $g(\vec{y}) = f^*(\vec{y})$,
$\forall \vec{y} \in E \Longrightarrow g = f^*$.

Αν $(E, \langle , \rangle)$ ένας ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και αν $f: E \to E$ είναι ένας ενδομορφισμός του E, τότε υπάρχει μοναδικός ενδομορφισμός $f^*: E \to E$, έτσι ώστε: $\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in E: \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\rangle}$ (*)

Ο ενδομορφισμός f^* καλείται ο προσαρτημένος ή συζυγής ενδομορφισμός του f.

Ιδιότητες του f^*

① $\boxed{f^{**} = f}$ $\forall \vec{y} \in E$: $\langle \vec{x}, f^{**}(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, (f^*)^*(\vec{y})\rangle \overset{(*)}{=} \langle f^*(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{y}, f^*(\vec{x})\rangle \overset{(*)}{=\!=\!=}$
$= \langle f(\vec{y}), \vec{x}\rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle \Longrightarrow f^{**}(\vec{y}) = f(\vec{y}), \ \forall \vec{y} \in E$

② Αν $f, g: E \to E$ είναι ενδομορφισμοί του E, τότε ορίζεται και ο ενδομορφισμός $g \circ f: E \to E$. Τότε $\boxed{(g \circ f)^* = f^* \circ g^*}$
$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E: \langle \vec{x}, (g\circ f)^*(\vec{y})\rangle \overset{(*)}{=\!=} \langle (g \circ f)(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle g(f(\vec{x})), \vec{y}\rangle \overset{(*)}{=\!=\!=} \langle f(\vec{x}), g^*(\vec{y})\rangle \overset{(*)}{=\!=\!=}$
$\overset{(*)}{=} \langle \vec{x}, f^*(g^*(\vec{y}))\rangle = \langle \vec{x}, (f^* \circ g^*)(\vec{y})\rangle \Rightarrow (g\circ f)^*(\vec{y}) = (f^* \circ g^*)(\vec{y}), \ \forall \vec{y} \in E \to (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

③ Αν $f, g: E \to E$ είναι ενδομορφισμοί του E και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε ορίζεται ο ενδομορφισμός $\kappa f + \lambda g: E \to E$, $(\kappa f + \lambda g)(\vec{x})$
$= \kappa f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})$. Τότε: $\boxed{(\kappa f + \lambda g)^* = \kappa f^* + \lambda g^*}$ (Άσκηση)

Παραδείγματα: ① $\boxed{(Id_E)^* = Id_E}$, όπου $Id_E: E \to E$, $Id_E(\vec{x}) = \vec{x}$.

$\forall \vec{x},\vec{y} \in E: \langle \vec{x}, (Id_E)^*(\vec{y})\rangle \overset{(*)}{=} \langle Id_E(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x},\vec{y}\rangle, \forall \vec{x}\in E \Rightarrow (Id_E)^*(\vec{y}) = \vec{y}, \forall \vec{y}\in E \Rightarrow$
$\Rightarrow Id_E^*(\vec{y}) = Id_E(\vec{y}) \Rightarrow Id_E^* = Id_E$

② $\boxed{\mathbb{O}^* = \mathbb{O}}$, όπου $\mathbb{O}: E\to E$, $\mathbb{O}(\vec{x}) = \vec{0}$.

$\forall \vec{x},\vec{y}\in E: \langle \vec{x}, \mathbb{O}^*(\vec{y})\rangle \overset{(*)}{=} \langle \mathbb{O}(\vec{x}),\vec{y}\rangle = \langle \vec{0},\vec{y}\rangle = 0, \forall \vec{x}\in E \Rightarrow \mathbb{O}^*(\vec{y}) = \vec{0}, \forall \vec{y}\in E \Rightarrow \mathbb{O}^* = \mathbb{O}$

Έστω ότι ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός. Τότε υπάρχει ο ενδομορφισμός $f^{-1}: E\to E$. Πρόβλημα: $(f^{-1})^* = ;$

Όμως: $f\circ f^{-1} = Id_E = f^{-1}\circ f \Rightarrow (f\circ f^{-1})^* = (Id_E)^* = (f^{-1}\circ f)^* \Rightarrow (f^{-1})^*\circ f^* = Id_E = f^*\circ (f^{-1})^*$
$\Rightarrow$ ο f^* είναι ισομορφισμός και $\boxed{(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*}$

Έστω ότι η ενδομορφισμός $f: E\to E$ είναι ισομετρία, δηλαδή: $\forall \vec{x},\vec{y}\in E: \langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x},\vec{y}\rangle \Rightarrow \forall \vec{x},\vec{y}\in E:$
$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{y}))\rangle = \langle \vec{x}, (f^*\circ f)(\vec{y})\rangle, \forall \vec{x}\in E \Rightarrow$
$\Rightarrow (f^*\circ f)(\vec{y}) = \vec{y}, \forall \vec{y}\in E \Rightarrow \boxed{f^*\circ f = Id_E} \Rightarrow \boxed{f^{-1} = f^*}$ και επειδή $f\circ f^{-1} = Id_E \Rightarrow f\circ f^* = Id_E$

Άρα f: ισομετρία $\Rightarrow f^{-1} = f^*$ και ότι ο f^* είναι ισομετρία.

Αν f: ισομορφισμός και $f^{-1} = f^*$, τότε: $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{y}))\rangle = \langle \vec{x}, f^{-1}(f(\vec{y}))\rangle = \langle \vec{x},\vec{y}\rangle, \forall \vec{x},\vec{y}\in E$
$\Rightarrow f$: ισομετρία.

Ο f είναι ισομετρία $\Leftrightarrow$ ο f: ισομορφισμός και $f^{-1}=f^* \Leftrightarrow$ ο f^*: ισομετρία και $f^{-1} = f^*$

Θεώρημα: Έστω $f: E\to E$ ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου Χώρου πεπερασμένης διάστασης $(E, \langle,\rangle)$. Τότε, για κάθε ΟΚΒ $\mathcal{B}$ του E: $\boxed{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tM^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}$

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ΟΚΒ του E. Έστω $A = (a_{ij}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ και $B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = (b_{ij})$.

Θέλω ${}^tA = B$, δηλαδή $({}^tA)_{ij} = (B)_{ij}$, $1\le i,j\le n$, δηλαδή $a_{ji} = b_{ij}$, $1\le i,j\le n$. $\forall j = 1,2,\dots,n$:

$\boxed{f(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj}\vec{e}_k}$, $\forall i = 1,\dots,n$: $\boxed{f^*(\vec{e}_i) = \sum_{k=1}^n b_{ki}\vec{e}_k}$

$\langle f(\vec{e}_j), \vec{e}_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{kj}\vec{e}_k, \vec{e}_i\right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj}\overbrace{\langle \vec{e}_k,\vec{e}_i\rangle}^{\delta_{ij}} = a_{ij}$

$$\langle \vec{e_j}, f^*(\vec{e_i})\rangle = \left\langle \vec{e_j}, \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\vec{e_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \overbrace{\langle \vec{e_j}, \vec{e_k}\rangle}^{\delta_{jk}} = b_{ij}$$

$\to \forall i,j = 1,\dots,n$: $b_{ij} = a_{ji}$, δηλαδή: $B = {}^tA$.

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω $f: E \to E$ είναι ενδομορφισμός του E. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τον f^*: έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ ΟΚΒ του E. Τότε, αν $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, θα έχουμε $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tA \Rightarrow \forall j = 1,\dots,n$ $f^*(\vec{e_j}) = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{kj}\vec{e_k} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\vec{e_k}$ και τότε $\forall\, \vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n} \in E$ $f^*(\vec{x}) = x_1 f^*(\vec{e_1}) + \dots + x_n f^*(\vec{e_n})$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: E \to E$ είναι ενδομορφισμός του E Χ. $(E, \langle , \rangle)$ $\dim_{\mathbb{R}} E = n < \infty$. Τότε, για κάθε ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του E: $\boxed{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}$.

Ο ενδομορφισμός $f: E \to E$ καλείται <u>αυτοπροσαρτημένος</u> ή <u>αυτοσυζυγής</u> $\Leftrightarrow f = f^*$.

<u>Πρόταση</u>: Ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος $\Leftrightarrow$ ο πίνακας του σε μια ΟΚΒ του E είναι συμμετρικός

<u>Απόδειξη</u>: $[\Rightarrow]$ Έστω $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, όπου $\mathcal{B}$: ΟΚΒ του E, και έστω ότι: $f = f^*$. Τότε από το Θεώρημα: ${}^tA = {}^tM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = A$

$[\Leftarrow]$ Έστω $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, όπου $\mathcal{B}$ ΟΚΒ του E και: ${}^tA = A$. Τότε ${}^tM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \overset{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}{=} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) \to f = f^* \to f$ αυτοπροσαρτημένος ■

Έστω ο Ευκλείδειος Χώρος $(\mathbb{R}_n, \langle , \rangle)$, όπου: $\langle X, Y\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Τότε ορίζεται ο ενδομορφισμός $f_A: \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$, $f_A(X) = AX$. Αν $\mathcal{B} = \left\{\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ είναι η συνήθης (ΟΚΒ) του $\mathbb{R}_n$, τότε: $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)$. Έστω ο προσαρτημένος ενδομορφισμός του f_A $f_A^*: \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$.

Γνωρίζουμε ότι: $f_A^*(X) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^*)X = {}^tM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)X = {}^tA \cdot X$

Άρα $\boxed{f_A^* = f_{{}^tA}}$

Άρα $\langle f_A(X), Y \rangle = \langle X, f_A^{t}(Y) \rangle \Rightarrow \boxed{\langle AX, Y \rangle = \langle X, {}^{t}A\, Y \rangle}$

Ιδιαίτερα, για κάθε συμμετρικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle, \ \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n}$$